専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　　　２８　大修

技術経営

時間９：３０～１１：３０

注意事項

1. 受験者は【一般問題】【数学問題】の２つの問題群から１つだけ選択し解答せよ。
2. 【一般問題】は第２～第３ページに、【数学問題】は第４～第７ページにある。
3. 問題群毎に、解答上の注意事項が与えられているので、よく読んで解答せよ。

【一般問題】

注意事項

1. 問題１と問題２の全てに解答すること。
2. 解答は問題１、問題２(1)、問題２(2)のそれぞれについて、別々の解答用紙に記入すること。
3. 各解答用紙の指定箇所に受験番号を記入すること。

問題 1.　(配点 20)　次の文章を読み、問(1)、(2)及び(3)の全てに答えなさい。

ある企業に勤務する A 氏は自分自身の企画案を携え、経営会議に臨もうとしている。この企画案が経営会議で了承されるためには、事前に経営会議の出席者全員に企画案の内容が説明または伝達されている必要があるものとする。

ただし、Y 氏に説明または伝達された内容は瞬時に Z 氏に伝達される。これを Y→Z と表記する。この時、Z 氏は Y 氏に企画案の説明および伝達があったそれまでのルートも含めて把握するものとする。

また、Y 氏は、Y 氏が企画案を Z 氏より後に知らされたことを把握した場合、経営会議にて企画案に対し必ず反対票を投じる。これを Y>Z と表記する。

(1) 下記の条件のもとで、A 氏が直接企画案の内容を説明する人数を最小としながら、経営会議で反対票を投じられることを確実に避けるためには、どのような順番で企画案を説明すれば良いか全て答えよ。ただし、経営会議の出席者は B 氏～E 氏の 4 名である。
(条件) B→C、C→D、C→E、E>B。

(2) 下記の条件のもとで、A 氏が直接企画案の内容を説明する人数を最小としながら、経営会議で反対票を投じられることを確実に避けるためには、どのような順番で企画案を説明すれば良いか全て答えよ。ただし、経営会議の出席者は B 氏～K 氏の 10 名である。
(条件) B→C、C→E、D→K、D→G、F→C、F→G、G→H、H→D、H→I、J→H、K→B、B＞D、C>B、H>G。

(3) 下記の条件のもとで、A 氏が直接企画案の内容を説明する人数を最小としながら、経営会議で投じられる反対票を 1 票以内とするためには、どのような順番で企画案を説明すれば良いか全て答えよ。ただし、経営会議の出席者は B 氏～K 氏の 10 名である。
(条件) (2)の条件に加え、I→J。

問題 2. (配点 80)　次の文章を読み、問(1)及び(2)の全てに答えなさい。

あなたは空飛ぶ自動車を開発・販売することを目指すベンチャー企業A社の経営者である。空飛ぶ自動車とは、「自動車として一般道を走行し、かつ航空機として空路を飛行する能力を持つ乗り物」である。あなたはこの製品を社会に普及させたいと考えている。

(1) この製品を社会に普及させるために、どのような項目の、どのような要素について、どのような内容を考慮しなければならないだろうか。下記の例にならって表を作成し、記入せよ。

なお、例示された「顧客」項目は解答に含めても構わないが、「対象顧客」要素とその考慮しなければならない内容については、解答に含めてはならない。

(例)

項目	要素	考慮しなければならない内容
顧客	対象顧客	A社の製品をどのような属性の顧客に販売しようとしているのか

(2) 作成した表の中から、この製品を社会に普及させるうえで解決困難な課題が生じる可能性がある項目を2つあげよ。そのうえで、各課題の内容とそれが生じる状況を説明せよ。

【数学問題】

注意事項

1. 問題 1, 問題 2, 問題 3 の全てに解答すること.
2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入すること.
3. 解答用紙の裏面を使用しても構わない.
4. 各解答用紙の指定箇所に必ず受験番号を記入すること.

以下, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする. 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{R}^m$ を m 次元ユークリッド空間とし, $|\cdot|$ により $\mathbb{R}^m$ におけるユークリッド距離を表す.

問題 1. (配点 40) $\mathbb{R}$ 上の C^n 級関数 f に対して, f の n 階導関数を $f^{(n)}$ により表す. 以下の問 (1)–(4) に答えよ.

(1) 以下の問 (i), (ii) に答えよ.

(i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ の値を求めよ.

(ii) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^6}{(1+x^2)^4}dx$ が収束することを示せ.

(2) 関数 f は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級とする. 以下の問 (i), (ii) に答えよ.

(i) 微分積分学の基本定理を用いて,

$$f(y) = f(x) + (y-x)\int_0^1 f^{(1)}(sy+(1-s)x)ds, \quad y, x \in \mathbb{R}$$

を示せ.

(ii) 前問の結果と数学的帰納法を用いて, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $y, x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n + \frac{(y-x)^N}{(N-1)!}\int_0^1 (1-s)^{N-1} f^{(N)}(sy+(1-s)x)ds$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) $\mathbb{R}$ 上の関数 ϕ を $\phi(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^4}$ により定義し, これを用いて, $\mathbb{R}$ 上の偶関数 η を

$$\eta(x) = \frac{1}{c}\left(3\phi(x) - \frac{3}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

により定義する. ここで, $c = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \phi(x)dx$ とする. このとき, 次を示せ.

$$\int_{-\infty}^\infty \eta(x)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^\infty x^k\eta(x)dx = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(4) 関数 f は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級であり，$f^{(6)}$ が $\mathbb{R}$ 上有界となるようなものとする．このとき，問 (1)–(3) の結果を用いて，任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の正の実数 ε に対して

$$\left| f(x) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \eta \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) dy \right| \leq \frac{\sup_{y \in \mathbb{R}} |f^{(6)}(y)| \varepsilon^6}{5!} \int_{-\infty}^{\infty} |z|^6 \eta(z) dz$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，η は前問において定義されたものとする．

問題 2. (配点 30)

$\mathbb{R}^{3\times3}$ を 3 次元実正方行列全体とし，

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3},\quad b=\begin{pmatrix}-3/2\\0\\\sqrt{10}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

を考える．$x,y\in\mathbb{R}^3$ に対し，x と y の標準内積を (x,y) により表す．このとき，以下の問 (1)–(3) に答えよ．

(1) A を対角化し，A が正則であることを示せ．さらに，以下を証明せよ．

$$|x|^2\le(x,Ax)\le\frac{9+\sqrt{17}}{2}|x|^2,\quad x\in\mathbb{R}^3.$$

(2) $B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ に対し，$\|B\|=\max_{x\in\mathbb{R}^3,\,|x|=1}|Bx|$ とおく．このとき，$\|A^{-1}\|\|A\|$ を求めよ．

(3) $x\in\mathbb{R}^3$ を方程式 $Ax=b$ の解とし，任意の $\tilde{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して，$r=b-A\tilde{x}$ とおく．このとき，$x-\tilde{x}=A^{-1}r$，$1\le\|A\||x|/|b|$ であることを用いて，

$$\frac{|x-\tilde{x}|}{|x|}\le2|r|$$

が成り立つことを証明せよ．

問題 3. (配点 30) 本問において，現れる確率変数は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義されているとする．以下の問 (1)–(3) に答えよ．

(1) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布であり，X_1 は区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従うとする．$x \in [0,1]$ に対して

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} : X_1 + \cdots + X_n > x\}$$

とおく．このとき，$\mathbb{P}(N > n)$ を n と x で表せ．ただし $n \in \mathbb{N}$.

(2) 確率変数 X の分布が密度を持つとき，$-\log F(X)$ が指数分布に従うことを証明せよ．ここで F は X の分布関数である．

(3) コイン投げの独立試行を考える．コインの表を H，裏を T で表し，H と T を書き並べることによりコイン投げの結果を示すことにする．例えば，2 回のコイン投げの結果が順に，表，裏，であればこれを HT によって表す．また，1 回のコイン投げで表が出る確率を α で表し，$0 < \alpha < 1$ を満たすとする．

今，3 回連続のコイン投げを 1 回の試行として，確率変数 X を

$$X = \begin{cases} 1, & \text{試行結果が } HTT,\ HTH,\ THH,\ THT \text{ のとき}, \\ 0, & \text{試行結果が } HHT,\ TTH \text{ のとき}, \end{cases}$$

と定め，上記以外の試行結果の場合は次の試行を行い，X の値が定まるまでこれを繰り返すとする．このとき，以下の問 (i)，(ii) に答えよ．

(i) n 回目の試行まで X の値が定まらない確率を求めよ．

(ii) $\mathbb{P}(X = 1) = 2/3$ を証明せよ．