専門科目（午前）　　　　　　　　　27　大修

技 術 経 営

時間 9：30〜11：30

注　意　事　項

1. 受験者は【一般問題】【数学問題】の２つの問題群から**1つだけ選択し**解答せよ.
2. 【一般問題】は第２〜第３ページに,【数学問題】は第４〜第６ページにある.
3. 問題群毎に，解答上の注意事項が与えられているので，よく読んで解答せよ.

【一般問題】

注意事項

1. 問題 1，問題 2 のすべてに解答すること．
2. 解答は問題 1(1)(2)(3)，問題 2(1)，問題 2(2)のそれぞれについて別々の解答用紙に記入すること．
   解答用紙は全部で 3 枚になる．
3. 各解答用紙の指定箇所に必ず受験番号を記入すること．

問題 1．（配点 20） 次の(1), (2), (3) の全てに答えなさい．

(1) 3 進法では, 数を表すための記号として 0, 1, 2 のみ用い, 10 進法の 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... は 3 進法では 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, ... と表される．よって，3 進法での一桁の数の足し算は

・繰り上がりのない足し算： 0+0 = 0, 0+1 = 1+0 = 1, 0+2 = 1+1 = 2+0 = 2

・繰り上がりのある足し算： 1+2 = 2+1 = 10, 2+2 = 11

となる．では，次の計算が 3 進法における正しい足し算になるためには，ア，イ，ウ にはそれぞれ 0, 1, 2 の何が入るか，例を参考に答えなさい．ただし，異なるカタカナ文字には異なる数字が入り，最上位の数字が 0 となる可能性もある．

$$
\begin{array}{rcc}
 & \boxed{ア} & \boxed{イ} \\
+ & \boxed{イ} & \boxed{ウ} \\
\hline
 & \boxed{ウ} & \boxed{ア}
\end{array}
$$

(例)

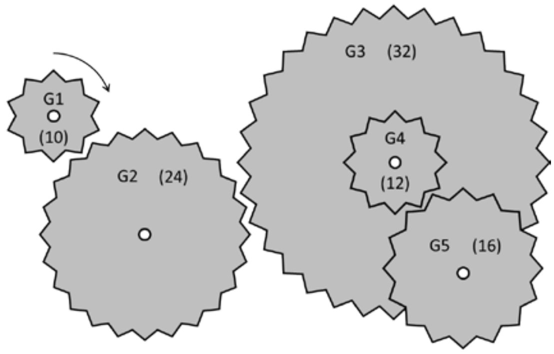
$$
\begin{array}{rccc}
 & & \boxed{ア} & \boxed{イ} \\
+ & & \boxed{ア} & \boxed{ウ} \\
\hline
 & 1 & \boxed{イ} & 1
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{rccc}
 & & \boxed{2} & \boxed{1} \\
+ & & \boxed{2} & \boxed{0} \\
\hline
 & 1 & \boxed{1} & 1
\end{array}
$$

答え：ア = 2，イ = 1，ウ = 0

(2) 数を表すための記号が 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C である 13 進法を考える．次の計算が 13 進法の正しい足し算になるためには，ア，イ，ウ には 0～C の何が入るか答えなさい．ただし，異なるカタカナ文字には異なる数字が入る．

$$
\begin{array}{rccc}
 & 9 & \boxed{イ} & A \\
+ & \boxed{ア} & B & \boxed{ウ} \\
\hline
 & C & 7 & \boxed{ア}
\end{array}
$$

(3) 5 つの歯車 G1～G5 が右図のように組み合っている．歯車の歯の数は，それぞれ 10, 24, 32, 12, 16 であり，G3 と G4 は共通の軸を持ち同時に回転する．G1 を 1 周させたとき，G5 は何周回転するか答えなさい．



問題 2.（配点 80）　次の(1), (2)の全てに答えなさい.

(1)下記の主張に対する論拠について，論理の脆弱性を複数箇所において指摘し，なぜ脆弱だと言えるのか説明しなさい.（800 字程度）

主張：若手科学者は専門分野に特化した研究活動に専念すべきである.
論拠：科学の高度化，専門化はますます加速しており，それぞれの分野において先端的な研究が世界中で日々行われ，新たな知識が創り出されている．若手科学者が複数の分野に関係する研究を行ったり，研究以外の活動を行ったりすれば，世界の研究の潮流から遅れていってしまう．そうなれば，若手科学者への国家による投資は無駄になる．なぜなら，若手ほど斬新な研究を行う可能性が高いからである.

(2)科学者による研究が社会と結びつくための条件と有効な活動について論じなさい．ここで「論じる」とは，概念定義と根拠を示しながら自らの論理を展開し結論を導くこととする.（800 字程度）

【数学問題】

注意事項

1. 問題 1, 問題 2, 問題 3 の全てに解答すること.

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入すること.

3. 解答用紙の裏面を使用しても構わない.

4. 各解答用紙の指定箇所に必ず受験番号を記入すること.

以下，$\mathbb{N}$ を正の整数の集合，$\mathbb{R}^m$ を m（$\in \mathbb{N}$）次元ユークリッド空間とする．

問題 1. (配点 30) 以下の問い (1)–(2) に答えよ．

(1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, かつ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{c_n} = 1$$

を満たすとする．このとき，次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n + d_n}{a_n + c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n d_n}{a_n c_n} = 1.$$

(2) 関数 $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は，任意の $0 < x_1 < x_2 < x_3$ に対して

$$f(x_1)(\sqrt{x_3} - \sqrt{x_2}) + f(x_2)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3}) + f(x_3)(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \geq 0$$

を満たすとする．

(a) 任意の $0 < x_1 < x_2 < x_3$ に対して，

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}}(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_3) + \frac{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}}(f(x_1) - f(x_3))$$

が成り立つことを示せ．

(b) 任意の $x \in (0,\infty)$ に対して，$0 < x - \alpha$ なる $\alpha \in (0,\infty)$ をとる．このとき，ある $C_x \in (0,\infty)$ が存在して，$x - \alpha < y < x + \alpha$ ならば

$$f(y) - f(x) \leq C_x|\sqrt{y} - \sqrt{x}|$$

が成り立つことを示せ．

(c) f は $(0,\infty)$ 上連続であることを証明せよ．

問題 2. (配点 30) 以下の問い (1)–(3) に答えよ．

(1) 任意の $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ に対して，行列 $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ．

(2) 実数 t を変数とする高々2次多項式全体のなす3次元実ベクトル空間を V とする．$f \in V$ に $\displaystyle\int_0^\infty f(t-s)e^{-\lambda s}\,ds,\ t \in \mathbb{R},$ を対応させる写像を F とする．ここで λ は正の実数である．このとき，F は V から V への線形変換であることを示し，基底 $\{1, t, t^2\}$ に関する F の表現行列を求めよ．

(3) n 行 n 列の実対称行列 A は $A^2 = 2A$ を満たすとする．ここで $n \in \mathbb{N}$．このとき，

$$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 2x\} + \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，上の等式における和はベクトル空間の直和を表すものとする．

問題 3. (配点 40) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし，以下に現れる確率変数はすべてこの確率空間上のものとする．表と裏の出る確率が同じコインを用いてコイン投げをし，r 回目に初めて表が出たとき 2^r 円もらえるゲームを繰り返し行うとする．ただし各コイン投げは独立になされるものとする．すなわち，k 回目のゲームにおける受け取り額を確率変数 X_k で表すとき，r 回目のコイン投げで初めて表が出たならば $X_k = 2^r$ であり，$\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ は独立確率変数列である．今，各 $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, に対し，

$$U_{k,n} = X_k 1_{\{X_k \leq n \log_2 n\}}, \quad V_{k,n} = X_k 1_{\{X_k > n \log_2 n\}},$$
$$\mu_n = \mathbb{E}[U_{k,n}], \quad \sigma_n^2 = \mathbb{V}[U_{k,n}],$$
$$r_n = \max\{r \in \mathbb{N} : 2^r \leq n \log_2 n\}$$

とおく．ここで，確率変数 Y に対し，$\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{V}[Y]$ はそれぞれ Y の期待値，分散を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 各 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, に対し，μ_n, σ_n^2 を r_n で表せ．

(2) 各 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, に対し，不等式

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} V_{k,n} \neq 0\right) \leq n\mathbb{P}(X_1 > n \log_2 n) \leq \frac{2}{\log_2 n}$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 一般に，$\mathbb{V}[Y] < \infty$ なる確率変数 Y と正の実数 λ に対して，

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| > \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}[Y]}{\lambda^2}$$

が成り立つことを証明せよ．

(4) 任意の正の実数 ε に対して，

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} U_{k,n}}{n\mathbb{E}[U_{k,n}]} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\log_2 n < \ r_n \leq \log_2 n + \log_2 \log_2 n$$

であることを用いてよい．

(5) 任意の正の実数 ε に対して，

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n r_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$$

が成り立つことを証明せよ．