

専門科目（午前）

26 大修

技術経営

時間 9 : 30 ~ 11 : 30

注 意 事 項

1. 受験者は【一般問題】【数学問題】の2つの問題群から 1つだけ選択し解答せよ.
2. 【一般問題】は第2～第3ページに, 【数学問題】は第4～第7ページにある.
3. 問題群毎に, 解答上の注意事項が与えられているので, よく読んで解答せよ.

【一般問題】

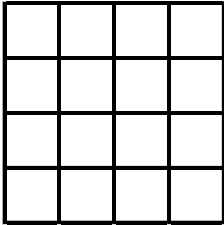
注意事項

1. 問題 1, 問題 2 のすべてに解答すること.
2. 解答は問題 1(1)(2), 問題 2(1)(2), 問題 2(3)のそれぞれについて別々の解答用紙に記入すること.  
解答用紙は全部で 3 枚になる.
3. 各解答用紙の指定箇所に必ず受験番号を記入すること.

問題 1. (配点 20)

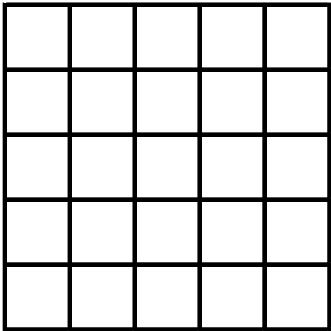
(1) 下図のような  $4 \times 4$  のマス目を解答用紙に記入し, 黒石 (●) 2 個, 白石 (○) 3 個を以下の条件で入れなさい.

条件: 縦, 横, 斜め  $45$  度の線上に同じ色の石は置けるが違う色の石は置けない



(2) 下図のような  $5 \times 5$  のマス目を解答用紙に記入し, 黒石 (●) 3 個, 白石 (○) 5 個を以下の条件で入れなさい.

条件: 縦, 横, 斜め  $45$  度の線上に同じ色の石は置けるが違う色の石は置けない



## 問題 2. (配点 80)

経済学においては、下記の引用文に記載されているような「経済人」という概念を用いて経済活動のモデル化が行われている。このように物事を論理的に考える際に行われる「モデル化」について問い(1)から(3)に答えよ。

### 引用文

「経済人」(ホモ・エコノミカス)という特別の人々をご存じだろうか？

経済人というのは、超合理的に行動し、他人を顧みず自らの利益だけを追求し、そのためには自分を完全にコントロールして、短期的だけでなく長期的にも自分の不利益になるようなことは決してしない人々である。自分に有利になる機会があれば、他人を出し抜いて自分の得となる行動を躊躇なくとれる人々である。

禁煙も禁酒もダイエットも成功せず、しょっちゅう電車の中に傘を忘れたり、ダブルブッキングをして友人を不愉快な気持ちにさせたり、当たるはずのない宝くじに大金を投じているのが、ありふれたわれわれの姿であるから、経済人というのは、まったくうらやましい限りだ。しかしそのような知人がいたら、決して友達にはしたくない人々である。

この神のような人物が、標準的経済学が前提としている経済人の姿なのである。

このような特別な人物が果たして一人でもいるのだろうかという疑問がすぐにわくのに、それどころか経済活動を行っている人、つまりわれわれすべてがこのような人物であるという想定の下で、経済学は構築されている。

(友野典男、『行動経済学 経済は「感情」で動いている』、光文社新書、2006年より抜粋)

### 問い

- (1) モデル化の例を記述しなさい。(400字程度)
- (2) モデル化を行うことの効用を論じなさい。(800字程度)
- (3) モデル化を行う際の注意点を論じなさい。(800字程度)

## 【数学問題】

### 注意事項

1. 問題 1, 問題 2, 問題 3 のすべてに解答すること.
2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入すること. 解答用紙は全部で 3 枚になる.
3. 必要があれば解答用紙の裏面に解答を記入してもよい.
4. 各解答用紙の指定箇所に必ず受験番号を記入すること.

以下,  $\mathbb{N}$  を 1 以上の整数の集合,  $\mathbb{R}^m$  を  $m$  ( $\in \mathbb{N}$ ) 次元ユークリッド空間,  $i = \sqrt{-1}$  とする.

問題 1. (配点 40) 以下の問い (1)–(3) に答えよ.

(1) 各  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して,  $\mathbb{R}$  上の関数  $D_n, F_n$  を次で定義する.

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}, \quad F_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

このとき, 以下の問い (a)–(e) に答えよ.

- (a) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  と任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$  が成り立つことを示せ.
- (b) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  と任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos(kx)$  が成り立つことを示せ.
- (c) 任意の  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  と任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2 D_n(x) = (e^{i(n+1)x} - e^{inx}) - (e^{-inx} - e^{-i(n+1)x}).$$

- (d) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  と  $\sin(x/2) \neq 0$  なる  $x \in \mathbb{R}$  に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\sum_{k=0}^n \{(e^{i(k+1)x} - e^{ikx}) - (e^{-ikx} - e^{-i(k+1)x})\}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} = \left( \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

- (e) 問い (a)–(d) で示した命題を用いて, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  と  $\sin(x/2) \neq 0$  なる  $x \in \mathbb{R}$  に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos(kx).$$

(2)  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  とする. 各  $p \in \mathbb{N}$  に対して

$$A_p^n = \int_0^\pi x^{2p} \cos(nx) dx$$

と定義する. 以下の問い (a), (b) に答えよ.

- (a) 数列  $(A_p^n)_{p \in \mathbb{N}}$  の満たす漸化式を求めよ。  
 (b) 次の等式を示せ。

$$A_p^n = (-1)^n \pi^{2p+1} (2p)! \sum_{j=1}^p \frac{(-1)^{j+1}}{(2(p-j)+1)! (\pi n)^{2j}}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

- (3) 各  $p \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\alpha_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

とおく。以下の問い (a)–(d) に答えよ。

- (a) 等式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \int_0^\pi \frac{x^{2p}}{2} \left( \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 dx \\ &= \pi^{2p+1} \left\{ \frac{1}{2(2p+1)} - (2p)! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \frac{\pi^{-2j}}{(2(p-j)+1)!} \cdot \frac{1}{k^{2j}} \right\} \\ & \quad + \frac{\pi^{2p+1}}{n+1} \cdot (2p)! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \frac{\pi^{-2j}}{(2(p-j)+1)!} \cdot \frac{1}{k^{2j-1}} \end{aligned}$$

を示せ。ただし、問い (1) と (2) で示した結果を既知としてよい。

- (b) 各  $p \in \mathbb{N}$  に対して以下が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \frac{\pi^{-2j}}{(2(p-j)+1)!} \cdot \frac{1}{k^{2j}} = \frac{1}{2(2p+1)!}.$$

ただし、各  $\alpha_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , が有限値であることを既知としてよい。

- (c) 数列  $(\alpha_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$  の満たす漸化式を求めよ。  
 (d)  $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$  を求めよ。

**問題 2.** (配点 30) 以下の問い (1), (2) に答えよ。

- (1) 次のような行列を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

以下の問い (a)–(c) に答えよ。

- (a)  $e_1, Ae_1, A^2e_1$  が一次従属であることを示せ。  
 (b)  $(A-I)(Ae_1 - 2e_1) = 0, (A-2I)(Ae_1 - e_1) = 0$  を示せ。

(c)  $A$  の固有値を対角成分に持つ対角行列を  $D$ , 固有ベクトルを並べてできる行列を  $V$  とする. 問い (b) の結果と等式  $AV = VD$  を利用して  $A$  の固有値をすべて求めよ.

(2) 次のような行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

以下の問い (a)–(c) に答えよ.

(a)  $Ae_2, A^2e_2$  が一次従属であることを示せ.

(b)  $e_3, Ae_3, A^2e_3$  が一次従属であることを示せ.

(c)  $A$  の固有値を対角成分に持つ対角行列を  $D$ , 固有ベクトルを並べてできる行列を  $V$  とする. 問い (a), (b) の結果と等式  $AV = VD$  を利用して  $A$  の固有値をすべて求めよ.

**問題 3.** (配点 30)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とし, 以下に現れる確率変数はすべてこの確率空間上のものとする. 下の図における節点  $A, B, C, D, E$  の上をランダムに動く点を考える. この点は 1 時点に 1 回のみ, 線につながった隣り合う節点へ等確率で動くとする. 時点  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  における点の位置を  $X_n$  で表すとき, 例えば,

$$\mathbb{P}(X_1 = B | X_0 = A) = \mathbb{P}(X_1 = D | X_0 = A) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(X_{10} = A | X_9 = B) = \mathbb{P}(X_{10} = C | X_9 = B) = \mathbb{P}(X_{10} = E | X_9 = B) = \frac{1}{3}$$

である. ここで,  $G \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{P}(H) > 0$  なる  $H \in \mathcal{F}$  に対して,  $\mathbb{P}(G | H) = \mathbb{P}(G \cap H) / \mathbb{P}(H)$  と定義する.  $S = \{A, B, C, D, E\}$  とおく. 以下の問い (1)–(6) に答えよ.

(1)  $p_{xy} = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$ ,  $x, y \in S$ , とおくとき,  $P = (p_{xy})_{x, y \in S}$  を行列表示せよ. ただし,  $S$  の元はアルファベット順に並べるものとする.

(2)  $\mu = \mu P$ ,  $\sum_{x \in S} \mu_x = 1$  を満たす  $\mathbb{R}^5$  の行ベクトル  $\mu = (\mu_x)_{x \in S}$  を求めよ.

(3)  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ -値確率変数  $Y$ ,  $\mathbb{P}(H) > 0$  なる  $H \in \mathcal{F}$  に対して,

$$\mathbb{E}[Y | H] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y > n | H)$$

が成り立つことを示せ. ただし,  $\mathbb{E}[Y | H]$  は  $H$  の指示関数  $1_H$  により  $\mathbb{E}[Y | H] = \mathbb{E}[Y 1_H] / \mathbb{P}(H)$  と定義される.

(4) 各  $x \in S$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して, 確率変数  $T_x$  と実数  $a_n^x$  を

$$T_x = \min\{m \in \mathbb{N} : X_m = x\}, \quad a_n^x = \mathbb{P}(\cap_{m=0}^n \{X_m \neq x\}),$$

とおくとき,

$$\mathbb{P}(\{T_x \geq n\} \cap \{X_0 = x\}) = a_{n-2}^x - a_{n-1}^x, \quad n \geq 2,$$

を示せ. ただし, 任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $a_n^x = \mathbb{P}(\cap_{m=k}^{n+k} \{X_m \neq x\})$  であることを既知としてよい.

(5) 各  $x \in S$  に対して  $m_x = \mathbb{E}[T_x | X_0 = x]$  とおく.  $\mu$  を問い (2) で定めたものとするとき,  $\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu_x$ ,  $x \in S$ , が成立していると仮定する. この時,  $x \in S$  に対して  $m_x$  を求めよ.

(6) 問い (5) と同じ仮定の下で,

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{m_x}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in S,$$

を示せ.

